GRUNNLEGGENDE MENGDELÆRE

Espen B. Langeland
realfagshjornet.wordpress.com
espenbl@hotmail.com

13.oktober 2019

Denne artikkelen gir en innføring i mengdelære. Notasjonsforklaringer står til slutt på side 6.

1 Innledning

En mengde betegnes med tegnene { og }. Innholdet i mengden er elementer. F.eks. er $\{a, b\}$ mengden av a og b. Rekkefølgen av elementene har ingenting å si, så $\{a, b\} = \{b, a\}$ osv. Gitt annengradsligningen

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 1 \qquad \vee \qquad x = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$L = \{1, 2\}$$

L er løsningsmengden. Dette kan også skrives

$$x \in \{1, 2\}$$

Like mengder har eksakt de samme elementene. F.eks.

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{3, 1, 2\}$$

osv. Ekvivalente mengder har like mange elementer. F.eks.

$$\{1, 2, 3\} \sim \{a, b, c\} \sim \{r, w, g\}$$

osv. Det har ingenting å si hva elementene er igjen, bare antallet.

Den tomme mengde betegnes $\emptyset$. Den er helt tom og inneholder ingen elementer. Ikke engang null. Den kan skrives

$\emptyset = \{\}$

Gitt annengradsligningen

$x^2 = -1$

$\Downarrow$

$L = \emptyset$

Løsningsmengden er tom. Det finnes jo ingen løsninger av denne ligningen.

Alle mengder har delmengder. Man kan konstruere 2^n delmengder av en mengde med n elementer. Gitt mengden $\{1, 2, 3\}$. Den har tre elementer. Dette gir $2^3 = 8$ delmengder:

$\{1, 2, 3\}$

$\{1, 2\}$

$\{1, 3\}$

$\{2, 3\}$

$\{1\}$

$\{2\}$

$\{3\}$

$\{\}$

Altså alt fra den tomme mengde til hele mengden.

2 Definisjoner ved illustrasjoner

Unionen av to mengder A og B skrives

$A \cup B$

Unionen av to mengder A og B er mengden av alle elementer som er med i A og B og begge. Se figur II.

Snittet av to mengder A og B skrives

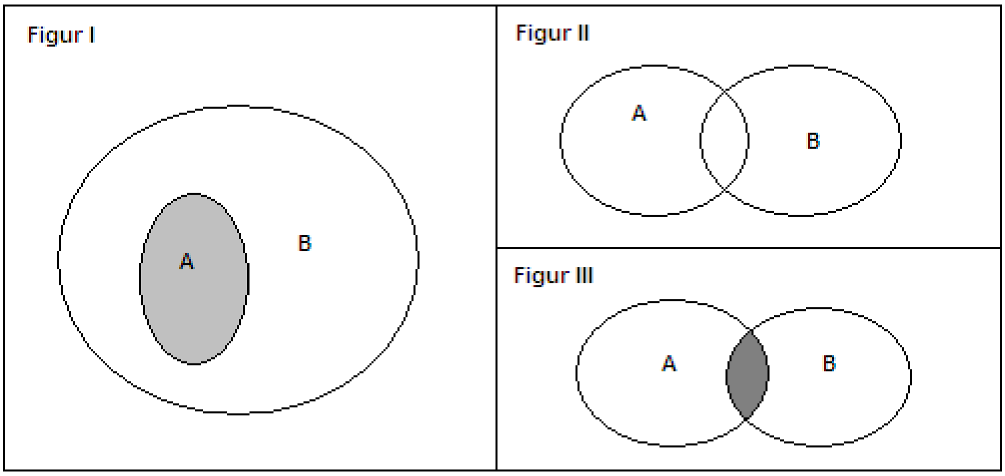
$A \cap B$

Snittet av to mengder A og B er mengden av alle elementer som bare er med i både A og B. Se figur III. (Snittet er det skraverte).

En delmengde A av B skrives

$A \subseteq B$

A er en delmengde av B. Hele A ligger i B, men B kan være større enn A. Se figur I. (A er det skraverte).

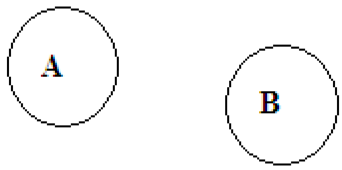


På figuren er faktisk A en ekte delmengde av B, dvs. $A \subset B$. Med dette menes at B har minst ett element mer enn A.

Disjunkte mengder A og B har tomt snitt, dvs.

$A \cap B = \emptyset$

De er adskilte og har ingen felles mengde eller elementer. Figur:



3 Generelle definisjoner og setninger

Definisjon mengde

$(y \text{ er en mengde}) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in y \vee y = \emptyset)$

Definisjon den tomme mengde

$\emptyset = x \Leftrightarrow (\forall y)(y \notin x)$

Definisjon union

$(A \cup B = y) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in y \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B) \wedge (y \text{ er en mengde})$

Av dette følger at

$A \cup B = B \cup A$

$A \cup A = A$

$A \cup \emptyset = A$

Definisjon snitt

$(A \cap B = y) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in y \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \text{ er en mengde})$

Av dette følger at

$A \cap B = B \cap A$

$A \cap A = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

Definisjon delmengde

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$

Av dette følger at

$A \subseteq A$

$(A \subseteq B \land B \subseteq A) \Rightarrow A = B$

$A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

Definisjon ekte delmengde

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \land A \neq B)$

Av dette følger at

$A \subset B \Rightarrow A \subseteq B$

Definisjon differensmengde

$A \backslash B = y \Leftrightarrow (\forall x)(x \in y \Leftrightarrow x \in A \land x \notin B) \land (y \text{ er en mengde})$

Av dette følger at

$A \backslash A = \emptyset$

$(A \cup B) \backslash B = A \backslash B$

$(A \cap B) \backslash B = \emptyset$

4 Notasjonsforklaringer

Tegn	*Betydning*
$\vee$	eller
$\wedge$	og samtidig
$\in$	er element i
$\notin$	er ikke element i
$A \Rightarrow B$	A medfører B
$A \Leftrightarrow B$	A medfører B og B medfører A
$\exists$	det eksisterer
$\forall$	for alle
$\sim$	ekvivalenstegn (kun for mengder)
$\neq$	forskjellig fra
$\setminus$	unntatt

Matematikken kan grovt sagt stykkes opp i tre deler: Logikk, mengdelære og predikat-kalkulus. På grunnskolen er mengdelæren utelatt helt. I den videregående skole er mengdelæren såvidt omtalt. I høyere matematikk er mengdelæren en viktig del. Denne artikkelen dekker bare den grunnleggende delen av mengdelæren i høyere matematikk. Jeg har forøvrig skrevet boken

MATEMATIKKLEKSIKON FOR VIDEREGÅENDE SKOLE

Her finner man alle emner innen den videregående skoles matematikk. Mer informasjon om boken finnes under hjemmeside her på Realfagshjørnet. Bl.a. oversikt over kapitler og noe generell omtale.

Boken kan bestilles under hjemmeside her på Realfagshjørnet eller forlagets hjemmeside:

`www.forlag.tk`